Método dos Mínimos Quadrados

Julia Sawaki Tanaka

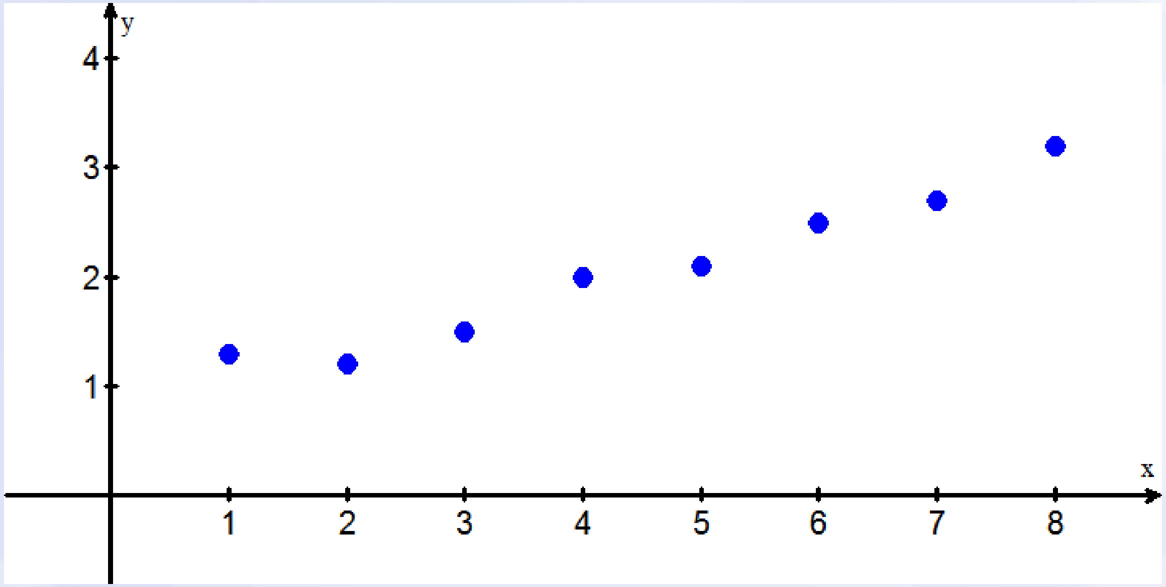
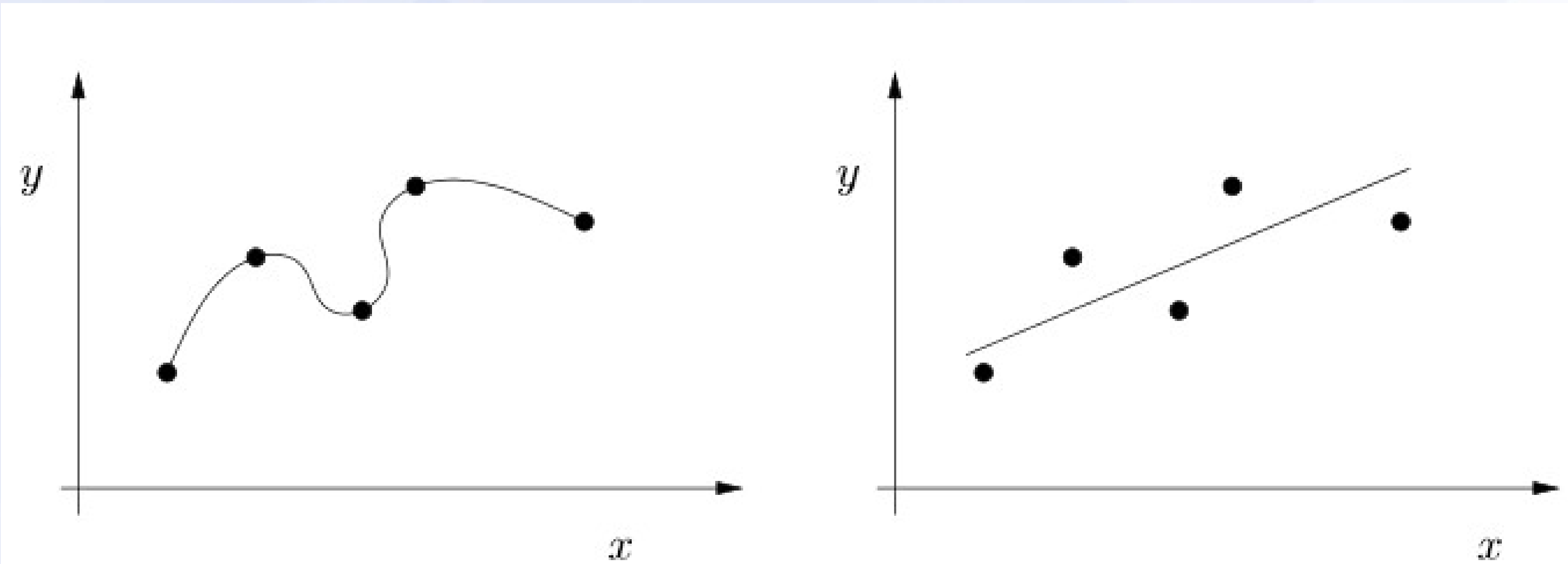


Diagrama de Dispersão



(a) (b)

interpolação ajuste ou aproximação

O **Método dos Mínimos Quadrados** é um método de aproximação de funções.

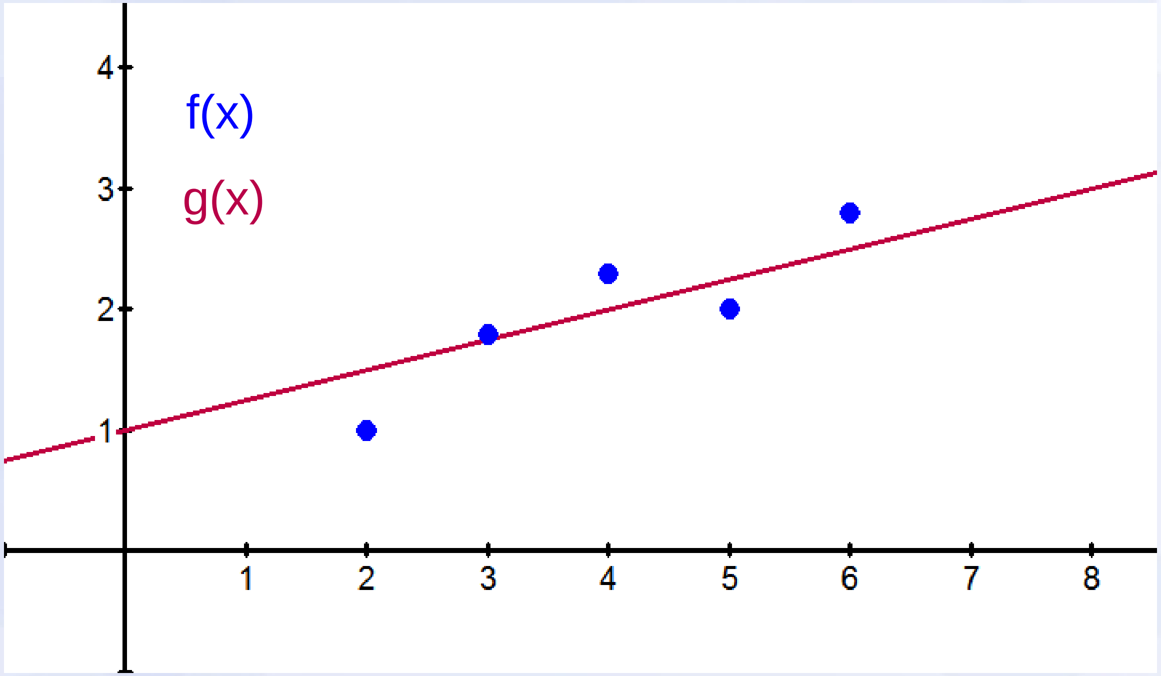
É utilizado quando:

- Conhecemos pontos discretos de uma função f.
- Conhecemos a forma analítica de uma função f.

- Desejamos aproximar a função f por uma função g.

$$r(x) = f(x) - g(x)$$

$$\sum_x r(x)$$



$$\sum_x |r(x)|$$

$$\sum_x r^2(x)$$

O problema é escolher adequadamente a família de funções aproximadoras.

Para isso, normalmente faz-se a observação do comportamento dos pontos no diagrama de dispersão para ver a forma geral dos pontos ou então deve-se basear em fundamentos teóricos do experimento.

Apresentaremos o **Método dos Mínimos Quadrados** começando pelo caso particular de ajuste de uma reta a uma tabela de pontos (**Regressão Linear**) e depois generalizaremos o raciocínio para aproximar uma função f por uma g da família G de funções que são combinações lineares de funções conhecidas, g_k, $k=0,1,2,\ldots,m$.

$$g(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x)$$

Regressão Linear

O objetivo agora é aproximar uma função f tabelada nos pontos x_i , $i=1,2,...,n,\ n \geq 2,$ por uma função g da família $a_0 + a_1 x$, pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Isto significa determinar os parâmetros a_0 e a_1 da reta $a_0 + a_1 x$ de modo que a soma dos quadrados dos resíduos nos pontos dados, seja mínima.

O resíduo em cada ponto $(x_i , f(x_i))$ é dado por:

$$r(x_i) = f(x_i) - g(x_i)$$

$$g(x)=a_0+a_1 x$$

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (r(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2$$

$$g(x_i)=a_0+a_1 x_i$$

$$g(x_i) = a_0 + a_1 x_i$$

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 - a_1 x_i)^2$$

$$\frac{\partial E(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0 \qquad \frac{\partial E(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0 \qquad 2\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0$$

$$-\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0 \qquad -\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Equações Normais

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \end{bmatrix}$$

Sistema Normal

Este Sistema tem determinante positivo, portanto sempre tem solução.

Equações Normais

$$a_0\sum_{i=1}^{n}1 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}f(x_i) \quad \text{Eq.1}$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n}x_i + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i) \quad \text{Eq.2}$$

Eq.1 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

$$a_0\sum_{i=1}^{n}1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}f(x_i)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad \text{Eq.3}$$

Eq.2 $-\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$-a_0\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i - a_1\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = -\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i) \quad \text{Eq.4}$$

Eq.3 + Eq.4

$$a_0\sum_{i=1}^{n}1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - a_0\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}f(x_i)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)$$

$$a_0\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}f(x_i)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)$$

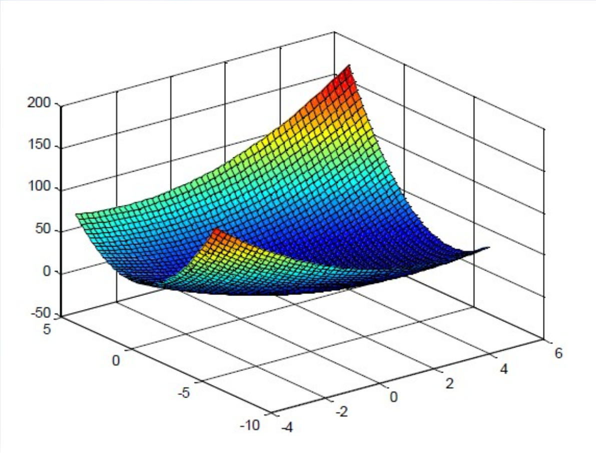
$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \text{Eq.3}$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

$(\bar{a}_0, \bar{a}_1)$ é um ponto de mínimo de $E(a_0, a_1)$ se o seu Hessiano $\nabla^2 E(\bar{a}_0, \bar{a}_1)$ é uma forma definida positiva.

$$\nabla^2 E(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = \frac{\partial^2 E(\bar{a}_0, \bar{a}_1)}{\partial a^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 E(\bar{a}_0, \bar{a}_1)}{\partial a_0^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 E(\bar{a}_0, \bar{a}_1)}{\partial a_1 \partial a_0} \\ \dfrac{\partial^2 E(\bar{a}_0, \bar{a}_1)}{\partial a_0 \partial a_1} & \dfrac{\partial^2 E(\bar{a}_0, \bar{a}_1)}{\partial a_1^{\,2}} \end{bmatrix}$$



Exemplo de Regressão Linear

Como resultado de algum experimento, suponha que tenhamos obtido os seguintes valores para a função f:

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**

$$g(x) = a_0 + a_1 x$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

$$a_0 = 0 \qquad e \qquad a_1 = 0{,}475$$

$$g(x) = 0{,}475\,x$$

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**
$g(x_i)$	0,95	1,9	2,85	3,8

Método dos Mínimos Quadrados
Caso Geral

Apresentaremos agora a aproximação de uma função f por uma função g da família G:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_m g_m(x)$$

linear nos parâmetros, pelo **Método dos Mínimos Quadrados**.

A escolha das funções g_k deve ser feita baseada tanto no comportamento da função f quanto nas propriedades desejadas para a função aproximadora.

Podemos dividir os problemas de aproximação de uma função em dois casos distintos:

- quando a função f é tabelada, ou seja, o domínio da função que se quer aproximar é discreto;

- quando a forma analítica da função f é conhecida, ou seja, o domínio de f é contínuo.

Domínio Discreto

Para aproximar uma função f tabelada em n pontos distintos x_1 , x_2 , x_3 ,...,x_n , por uma função g da forma:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_m g_m(x)$$

precisamos determinar a_0 , a_1 , ..., a_m que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos nos pontos x_1 , x_2 , x_3 ,...,x_n .

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} (r(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2$$

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} (r(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 g_0(x_i) - a_1 g_1(x_i) - \cdots - a_m g_m(x_i))^2$$

$$\frac{\partial E(a_0, \ldots, a_m)}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 g_0(x_i) - \cdots - a_m g_m(x_i))(-g_0(x_i)) = 0$$

$$\frac{\partial E(a_0, \ldots, a_m)}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 g_0(x_i) - \cdots - a_m g_m(x_i))(-g_1(x_i)) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial E(a_0, \ldots, a_m)}{\partial a_m} = 2\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 g_0(x_i) - \cdots - a_m g_m(x_i))(-g_m(x_i)) = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial E(a_0, \ldots, a_m)}{\partial a_s} = 2\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 g_0(x_i) - \cdots - a_m g_m(x_i))(-g_s(x_i)) = 0}$$

$$0 \leqslant s \leqslant m$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-a_0 g_0(x_i)-\cdots-a_m g_m(x_i)\right)\left(-g_s(x_i)\right)=0$$

$$0\leqslant s\leqslant m$$

$$-\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_s(x_i)+\sum_{i=1}^{n} a_0 g_0(x_i)g_s(x_i)+\cdots+\sum_{i=1}^{n} a_m g_m(x_i)g_s(x_i)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 g_0(x_i)g_s(x_i)+\cdots+\sum_{i=1}^{n} a_m g_m(x_i)g_s(x_i)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_s(x_i)$$

$\therefore$ As Equações Normais para $0\leq s\leq m$ são:

$$a_0\sum_{i=1}^{n} g_0(x_i)g_s(x_i)+\cdots+a_m\sum_{i=1}^{n} g_m(x_i)g_s(x_i)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_s(x_i)$$

Exemplo de um Caso Geral com Domínio Discreto

Observando um sinal no osciloscópio, verifica-se que ele corresponde à superposição de dois efeitos, um oscilatório e outro crescente. Assim, vamos aproximá-lo por uma função da família $g(x) = a_0 x + a_1 cos(x)$.

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**

Neste exemplo: $n=4$ e $m=1$

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x)$$

$$g(x) = a_0 x + a_1 \cos(x)$$

$$g_0(x) = x$$

$$g_1(x) = \cos(x)$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n} g_0(x_i)g_s(x_i) + a_1\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i)g_s(x_i) + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} g_m(x_i)g_s(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_s(x_i)$$

$$0 \leqslant s \leqslant m$$

Em particular, para $n=4$ e $m=1$ temos:

$$a_0\sum_{i=1}^{4} g_0(x_i)g_0(x_i) + a_1\sum_{i=1}^{4} g_1(x_i)g_0(x_i) = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)g_0(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=1}^{4} g_0(x_i)g_1(x_i) + a_1\sum_{i=1}^{4} g_1(x_i)g_1(x_i) = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)g_1(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=1}^{4}(g_0(x_i))^2+a_1\sum_{i=1}^{4}g_1(x_i)g_0(x_i)=\sum_{i=1}^{4}f(x_i)g_0(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=1}^{4}g_0(x_i)g_1(x_i)+a_1\sum_{i=1}^{4}(g_1(x_i))^2=\sum_{i=1}^{4}f(x_i)g_1(x_i)$$

$$g_0(x)=x \qquad g_1(x)=\cos(x)$$

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**
$g_0(x_i)$	2	4	6	8
$g_1(x_i)$	-0,4161	-0,6536	0,9602	-0,1455

$$a_0 = 0{,}4778 \qquad e \qquad a_1 = -0{,}2945$$

$$g(x) = 0{,}4778\,x - 0{,}2945\cos(x)$$

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**
$g(x_i)$	1,0782	2,1038	2,5842	3,8654

Exemplo de Aproximação por uma Família de Funções Não Lineares nos Parâmetros

Agora desejamos ajustar uma função f por outra função g de uma família **não linear** nos parâmetros.

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots$$

A dificuldade, e em alguns casos até mesmo a impossibilidade de resolver sistemas de equações não lineares, nos leva à linearização nos parâmetros.

Vamos aproximar a função f tabelada, por uma função g **não linear** nos parâmetros, da família:

$$g(x) = a e^{bx}$$

$$\ln(g(x)) = \ln(a e^{bx}) = \ln(a) + \ln(e^{bx}) = \ln(a) + bx$$

$$\ln(g(x)) = a_0 + a_1 x$$

$$onde \quad a_0 = \ln(a) \quad e \quad a_1 = b$$

$$a = \mathrm{e}^{a_0} \quad e \quad b = a_1$$

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**
$ln\,(f(x_i))$	0	0,6931	0,9163	1,3863

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

$$a_0 = -0,3466 \qquad e \qquad a_1 = 0,2191$$

$$g(x) = a\,e^{b\,x} \qquad\qquad \ln(g(x)) = \ln(a) + b\,x = a_0 + a_1\,x$$

$$onde \quad a_0 = \ln(a) \quad e \quad a_1 = b$$

$$a_0 = \ln(a) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{a_0} = a \quad \Rightarrow \quad a = e^{-0,3466} \quad \Rightarrow$$

$$a = 0,7071$$

$$b = 0,2191$$

$$g(x) = 0,7071\,e^{0,2191\,x}$$

$$g(x) = 0{,}7071\, e^{0{,}2191\, x}$$

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**
$g(x_i)$	1,0959	1,6986	2,6327	4,0805

Agora, vamos aproximar a função f tabelada, por uma função g **não linear** nos parâmetros, da família:

$$g(x) = a\,x^b$$

$$\ln(g(x)) = \ln(a\,x^b) = \ln(a) + \ln(x^b) = \ln(a) + b\,\ln(x)$$

$$\ln(g(x)) = a_0 + a_1 \ln(x)$$

$$onde \quad a_0 = \ln(a) \quad e \quad a_1 = b$$

$$a = \mathrm{e}^{a_0} \quad e \quad b = a_1$$

$$g(x) = a\,x^{b}$$

$$\ln(g(x)) = a_0 + a_1 \ln(x) \qquad onde \quad a_0 = \ln(a) \quad e \quad a_1 = b$$

i	1	2	3	4
x_i	**2**	**4**	**6**	**8**
$ln\,(x_i)$	0,6931	1,3863	1,7918	2,0794
$f(x_i)$	**1**	**2**	**2,5**	**4**
$ln\,(f(x_i))$	0	0,6931	0,9163	1,3863

$$a_0 = -0{,}6627 \qquad e \qquad a_1 = 0{,}9489$$

$$a_0 = \ln(a) \quad \Rightarrow \quad a = e^{a_0} \quad \Rightarrow \quad a = e^{-0{,}6627} \quad \Rightarrow$$

$$a = 0{,}5155 \qquad\qquad b = 0{,}9489$$

$$g(x) = 0{,}5155\,x^{0{,}9489}$$

Série de Taylor

Série de Potências

Uma **Série de Potências** é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e $c_n's$ são constantes chamadas de coeficientes da série.

A forma geral de uma **Série de Potências** centrada em $x = a$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

A Série de Potências fornece uma maneira de representar, de forma polinomial, as funções que aparecem na matemática, física e química.

Série de Taylor

Seja f uma função representada por uma série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \quad (1)$$

Tomando $x = a$, obtemos:

$$f(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots + c_n(a-a)^n + \cdots$$

$$f(a) = c_0$$

$$c_0 = f(a)$$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \quad (1)$$

Derivando a função (1), obtemos:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots \quad (2)$$

Tomando $x = a$, obtemos:

$$f'(a) = c_1 + 2c_2(a-a) + 3c_3(a-a)^2 + \cdots + nc_n(a-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f'(a) = c_1$$

$$c_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots \quad (2)$$

Derivando a função (2), obtemos:

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots + (n-1)\cdot nc_n(x-a)^{n-2} + \cdots \quad (3)$$

Tomando $x = a$, obtemos:

$$f''(a) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(a-a) + 3\cdot 4c_4(a-a)^2 + \cdots + (n-1)\cdot nc_n(a-a)^{n-2} + \cdots$$

$$f''(a) = 2c_2$$

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3\,c_3(x-a) + 3\cdot 4\,c_4(x-a)^2 + \cdots + (n-1)\cdot n\,c_n(x-a)^{n-2} + \cdots \quad (3)$$

Derivando a função (3), obtemos:

$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4\,c_4(x-a) + \cdots + (n-2)\cdot(n-1)\cdot n\,c_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

Tomando $x = a$, obtemos:

$$f'''(a) = 2\cdot 3\,c_3 + 2\cdot 3\cdot 4\,c_4(a-a) + \cdots + (n-2)\cdot(n-1)\cdot n\,c_n(a-a)^{n-3} + \cdots$$

$$f'''(a) = 2\cdot 3\,c_3$$

$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

No caso geral: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Substituindo o coeficiente $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ na função f acima, obtemos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

conhecida como **Série de Taylor** da função f em $x = a$ (ou ao redor de a ou centrada em a).

O caso especial quando $a = 0$ é denominado **Série de Maclaurin**.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

$$P_1(x) = f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)$$

$$P_2(x) = f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P_n(x) = f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exemplo de Série de Taylor

Vamos determinar os polinômios de Taylor para $f(x) = sen(x)$ em $a = 0$.

Para $n = 1$:

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)$$

Como $a = 0$: $$P_1(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\, x$$

$$P_1(x) = sen(0) + \frac{\cos(0)}{1}\, x$$

$$P_1(x) = 0 + 1\,x \qquad \Rightarrow \qquad P_1(x) = x$$

Para $n = 2$:

$$P_2(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2$$

Como $a = 0$:

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$$

Como $f(x) = sen(x)$:

$$P_2(x) = sen(0) + \frac{\cos(0)}{1}x - \frac{sen(0)}{2}x^2$$

$$P_2(x) = 0 + 1\,x - \frac{0}{2} \quad \Rightarrow \quad P_2(x) = x$$

Para $n = 3$:

$$P_3(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

Como $a = 0$:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Como $f(x) = sen(x)$:

$$P_3(x) = sen(0) + \frac{\cos(0)}{1}x - \frac{sen(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{6}x^3$$

$$P_3(x) = 0 + 1x - 0 - \frac{1}{6}x^3 \quad \Rightarrow \quad P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Para $n = 5$:

$$P_5(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$P_5(x) = sen(0) + \frac{\cos(0)}{1}x - \frac{sen(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{6}x^3 + \frac{sen(0)}{24}x^4 + \frac{\cos(0)}{120}x^5$$

$$P_5(x) = 0 + 1x - 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{120}x^5$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Para $n = 7$:

$$P_7(x) = \frac{\cos(0)}{1!}x - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 - \frac{\cos(0)}{7!}x^7$$

$$P_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

Linearização por Expansão em Série de Taylor

Para linearizar uma função, podemos expandir a função não-linear em Série de Taylor em torno de um ponto, desprezando-se todos os termos após a primeira derivada.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)$$

$$f(a) \approx f(\bar{a}) + f'(\bar{a})(a-\bar{a})$$

onde $a-\bar{a} = \varepsilon_0$

$$f(a) \approx f(\bar{a}) + f'(\bar{a})\varepsilon_0$$

Vamos linearizar a função $g(x) = a\,e^{bx}$ expandindo-a em Série de Taylor em torno de um ponto $\bar{a}$ e desprezando todos os termos de ordem superior a 1.

$$f(a) \approx f(\bar{a}) + f'(\bar{a})(a - \bar{a})$$

$$h(a, b) = a\,e^{bx}$$

$$h(a, b) \approx h(\bar{a}, \bar{b}) + \frac{\partial h(\bar{a}, \bar{b})}{\partial a}(a - \bar{a}) + \frac{\partial h(\bar{a}, \bar{b})}{\partial b}(b - \bar{b})$$

onde: $a - \bar{a} = \varepsilon_0 \qquad e \qquad b - \bar{b} = \varepsilon_1$

$$h(a, b) \approx h(\bar{a}, \bar{b}) + \frac{\partial h(\bar{a}, \bar{b})}{\partial a}\varepsilon_0 + \frac{\partial h(\bar{a}, \bar{b})}{\partial b}\varepsilon_1$$